PART2　2 次関数のグラフと x 軸の共有点

例題

(1)　次の 2 次関数のグラフと x 軸との位置関係を求めよ。また，共有点をもつ場合は，その座標を求めよ。

(i)　$y=x^2-4x+3$　　(ii)　$y=-4x^2-12x-9$　　(iii)　$y=x^2+3x+3$

(2)　2 次関数 $y=x^2+4x+k$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

Point Pickup

練習

(1)　次の２次関数のグラフと x 軸との位置関係を求めよ。また，共有点をもつ場合は，その座標を求めよ。

(i)　$y=x^2-x-4$　　(ii)　$y=x^2+5x+7$　　(iii)　$y=-\frac{1}{2}x^2+4x-8$

(2)　２次関数 $y=-x^2+2x+k+3$ のグラフと x 軸の位置関係が次のようになるとき，k のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(i)　共有点をもたない　　(ii)　共有点をもつ

第 7 講　PART2　確認問題

1 次の２次関数のグラフと x 軸との位置関係と，共有点をもつ場合の座標の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。ア

$y=x^2-5x+3$

① x 軸と異なる２点で交わり，共有点の座標は，
$\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{2},\ 0\right)$

② x 軸と接し，共有点の座標は，$(-1,\ 0)$

③ x 軸と共有点をもたない

④ x 軸と異なる２点で交わり，共有点の座標は，
$(1,\ 0)$，$(-3,\ 0)$

2 次の２次関数のグラフと x 軸との位置関係と，共有点をもつ場合の座標の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。イ

$y=x^2-4x+12$

① x 軸と異なる２点で交わり，共有点の座標は，
$(2+\sqrt{3},\ 0)$，$(2-\sqrt{3},\ 0)$

② x 軸と接し，共有点の座標は，$(2,\ 0)$

③ x 軸と共有点をもたない

④ x 軸と異なる２点で交わり，共有点の座標は，
$(-2,\ 0)$，$(6,\ 0)$

3 次の2次関数のグラフと x 軸との位置関係と，共有点をもつ場合の座標の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。 ウ

$$y=\frac{1}{3}x^2+4x+12$$

① x 軸と異なる2点で交わり，共有点の座標は，$(6,\ 0)$，$(-6,\ 0)$

② x 軸と接し，共有点の座標は，$(-6,\ 0)$

③ x 軸と共有点をもたない

④ x 軸と接し，共有点の座標は，$\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$

4 2次関数 $y=-x^2+3x+k+4$ のグラフと x 軸が共有点をもたないときの，k のとりうる値の範囲を①～③から選べ。

エ

① $k<-\frac{25}{4}$　　② $k=-\frac{25}{4}$

③ $k>-\frac{25}{4}$

5 2次関数 $y=-x^2+3x+k+4$ のグラフと x 軸が共有点をもつときの，k のとりうる値の範囲を①～③から選べ。 オ

① $k\leqq-\frac{25}{4}$　　② $k=-\frac{25}{4}$

③ $k\geqq-\frac{25}{4}$

PART2　２次関数のグラフと x 軸の共有点

例題

(1)　次の２次関数のグラフと x 軸との位置関係を求めよ。また，共有点をもつ場合は，その座標を求めよ。

(i)　$y=x^2-4x+3$　　(ii)　$y=-4x^2-12x-9$　　(iii)　$y=x^2+3x+3$

(2)　２次関数 $y=x^2+4x+k$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

(1)(i)　２次方程式 $x^2-4x+3=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot3=1>0$　　よって　異なる２点で交わる

共有点の x 座標は，２次方程式 $x^2-4x+3=0$ の実数解である。

$(x-1)(x-3)=0$　　$x=1，3$

したがって，求める共有点の座標は $(1，0)$，$(3，0)$

(ii)　２次方程式 $-4x^2-12x-9=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-6)^2-(-4)\cdot(-9)=0$　　よって　接する

共有点の x 座標は，２次方程式 $-4x^2-12x-9=0$ の実数解である。

$4x^2+12x+9=0$　　$(2x+3)^2=0$　　$x=-\dfrac{3}{2}$

したがって，求める共有点の座標は $\left(-\dfrac{3}{2}，0\right)$

(iii)　２次方程式 $x^2+3x+3=0$ の判別式を D とすると

$D=3^2-4\cdot1\cdot3=-3<0$　　よって　共有点をもたない

(2)　２次関数 $y=x^2+4x+k$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，２次方程式 $x^2+4x+k=0$ の実数解の個数と一致する。この方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=2^2-1\cdot k=4-k$

よって，共有点の個数は

$D>0$ つまり $4-k>0$ より $k<4$ のとき２個

$D=0$ つまり $4-k=0$ より $k=4$ のとき１個

$D<0$ つまり $4-k<0$ より $k>4$ のとき０個

練習

(1)　次の２次関数のグラフと x 軸との位置関係を求めよ。また，共有点をもつ場合は，その座標を求めよ。

(i)　$y=x^2-x-4$　　(ii)　$y=x^2+5x+7$　　(iii)　$y=-\frac{1}{2}x^2+4x-8$

(2)　２次関数 $y=-x^2+2x+k+3$ のグラフと x 軸の位置関係が次のようになるとき，k のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(i)　共有点をもたない　　(ii)　共有点をもつ

(1)(i)　２次方程式 $x^2-x-4=0$ の判別式を D とすると

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-4)=17>0$　　よって　異なる２点で交わる

共有点の x 座標は，２次方程式 $x^2-x-4=0$ の実数解である。

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

したがって，求める共有点の座標は $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$，$\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$

(ii)　２次方程式 $x^2+5x+7=0$ の判別式を D とすると

$D=5^2-4\cdot1\cdot7=-3<0$　　よって　共有点をもたない

(iii)　２次方程式 $-\frac{1}{2}x^2+4x-8=0$ の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=2^2-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-8)=0$　　よって　接する

共有点の x 座標は，２次方程式 $-\frac{1}{2}x^2+4x-8=0$ の実数解である。

$x^2-8x+16=0$　　$(x-4)^2=0$　　$x=4$

したがって，求める共有点の座標は $(4,\ 0)$

(2)　２次関数 $y=-x^2+2x+k+3$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，２次方程式 $-x^2+2x+k+3=0$ の実数解の個数と一致する。この方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=1^2-(-1)\cdot(k+3)=k+4$$

(i)　共有点をもたないのは $D<0$ のときである

よって $k+4<0$　　$k<-4$

(ii)　共有点をもつのは $D\geqq0$ のときである

よって $k+4\geqq0$　　$k\geqq-4$

第 7 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

2 次方程式 $x^2-5x+3=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot3=13>0$$

よって，x 軸と**異なる 2 点で交わる。** [A]

共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2-5x+3=0$ の実数解である。

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

よって，求める共有点の座標は

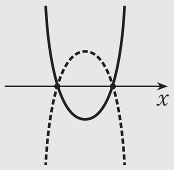
$$\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2},\ 0\right),\ \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2},\ 0\right)$$

[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係は次のようになる。

$D>0$

⇕

異なる 2 点で交わる



2

[正解] イ：③

[解説]

2 次方程式 $x^2-4x+12=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot12=-8<0$$

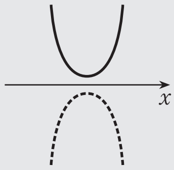
よって，x 軸と**共有点をもたない。** [B]

[B]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係は次のようになる。

$D<0$

⇕

共有点をもたない



3 [正解] ウ：②

[解説]

2 次方程式 $\frac{1}{3}x^2+4x+12=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-\frac{1}{3}\cdot 12=0$$

よって，x 軸と**接する**。 [C]

共有点の x 座標は，2 次方程式

$\frac{1}{3}x^2+4x+12=0$ の実数解である。

$x^2+12x+36=0$　$(x+6)^2=0$　　$x=-6$

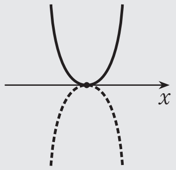
よって，求める共有点の座標は　**(−6，0)**

[C]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係は次のようになる。

$D=0$

⇕

接する



4 [正解] エ：①

[解説]

2 次関数 $y=-x^2+3x+k+4$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，2 次方程式 $-x^2+3x+k+4=0$ の実数解の個数と一致する。この方程式の判別式を D とすると

$$D=3^2-4\cdot(-1)\cdot(k+4)=4k+25$$

共有点をもたないのは，$D<0$ のときである。 [D]

よって，$4k+25<0$　より　$\boldsymbol{k<-\frac{25}{4}}$

[D]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係は次のようになる。

$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる

$D=0 \Longleftrightarrow$ 接する

$D<0 \Longleftrightarrow$ 共有点をもたない

5 [正解] オ：③

[解説]

2 次関数 $y=-x^2+3x+k+4$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，2 次方程式 $-x^2+3x+k+4=0$ の実数解の個数と一致する。この方程式の判別式を D とすると

$$D=3^2-4\cdot(-1)\cdot(k+4)=4k+25$$

共有点をもつのは，$D\geqq 0$ のときである。 [E]

よって，$4k+25\geqq 0$　より　$\boldsymbol{k\geqq -\frac{25}{4}}$

[E]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係は次のようになる。

$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる
$D=0 \Longleftrightarrow$ 接する
$D<0 \Longleftrightarrow$ 共有点をもたない